УДК 519.62

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

PhD., доцент Исомиддинов Анваржон Иномжонович

Наманганский инженерно-строительный институт

Республика Узбекистан, город Наманган

Аннотация. *В статье рассмотрены вычислительные алгоритмы для системы дифференциальных уравнений четвертого порядка. Решена тестовая задача.*

Ключевые слова: *Аппроксимации, матричная форма, прогоночные коэффициенты, обратная прогонка, точность.*

COMPUTATIONAL ALGORITHMS FOR A SYSTEM OF FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. *In article computational algorithms for a system of fourth-order differential equations are considered. Test problem solved.*

Keywords: *Approximation, matrix form, fit coefficients, inverse sweep, accuracy.*

Требуется определить неизвестный вектор функции

$$U(x) = \{U_1(x), U_2(x), \dots, U_n(x)\}$$

удовлетворяющей системе дифференциальных уравнений

$$[K(x)U''(x)]'' + a_5(x)[a_7(x)U''(x)]' + a_4(x)[a_6(x)U'(x)]' +$$
$$+a_3(x)U''(x) + a_2(x)U'(x) + a_1(x)U(x) = f(x), \qquad (1)$$

записанной в матричной форме при граничных условиях

$$\left\{\alpha_i U(x)+\beta_i U'(x)+\gamma_i K(x)U''(x)+\theta_i\left[K(x)U''(x)\right]'\right\}\Big|_{x=a} = d_i; \qquad (2)$$

$$\left\{\alpha_i U(x)+\beta_{i+2} U'(x)+\gamma_{i+2} K(x)U''(x)+\theta_{i+2}\left[K(x)U''(x)\right]'\right\}\Big|_{x=b} = d_{i+2}, \qquad (3)$$

где

$$K(x), \alpha_j(x)\ \left(j = \overrightarrow{1,7}\right), d_\vartheta, \beta_\vartheta, \gamma_\vartheta, \theta_\vartheta\ \left(\vartheta = \overrightarrow{1,4}\right) -$$

заданны квадратные матрицы в порядке n;

Приведём вычислительный алгоритм выше поставленных задач (1)-(3).

Введя обозначений

$$W(x) = K(x)U''(x) \qquad (4)$$

перепишем уравнение:

$$K(x)U''(x) - W(x) = 0$$

$$W''(x) = a_5(a_7K^{-1}W)' + a_4(a_6U') + a_3K^{-1}W + a_2U' + a_1U = f \qquad (5)$$

Построим равномерную сетку с шагом h:

$$\overrightarrow{\omega_h} = \left\{x_i = a + ih, \quad i = 0,1 \dots \dots, N; \quad h = \frac{b-a}{N}\right\}.$$

Согласно методу баланса [1], из второго уравнения (5) с погрешностью аппроксимации $O(h^2)$ имеем

$$A_i^1W_{i+1} + A_i^2W_i + A_i^3W_{i-1} + A_i^4U_{i+1} + A_i^5U_i + A_i^6U_{i-1} = \vec{f_i}. \qquad (6)$$

Здесь

$$A_i^1 = E + \frac{h}{2}a_5(x_i)a_7\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)K^{-1}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right);$$

$$A_i^2 = -2E + \frac{h}{2}a_5(x_i)\left[a_7\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)K^{-1}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) - a_7\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)K^{-1}\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)\right] +$$

$$+h\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a_5(x)K^{-1}(x)dx;$$

$$A_i^3 = E - \frac{h}{2}a_5(x_i)a_7\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)K^{-1}\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right); \qquad A_i^4 = a_4(x_i)a_6\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+\frac{h}{2}a_2(x_i);$$

$$A_i^5 = -a_4(x_i)\left[a_6\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + a_6\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)\right] + h\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} a_1(x)dx;$$

$$A_i^6 = a_4(x_i)a_6\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) - \frac{h}{2}a_2(x_i); \qquad \vec{f_i} = h\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx;$$

E- единичная матрица.

Продела аналогичную процедуру с первым уравнением (5) и обозначив

$$\begin{pmatrix} U_i \\ W_i \end{pmatrix} = \vartheta_i, \qquad (7)$$

представим первое уравнение (5) и уравнение (6) в виде.

$$A_i \vartheta_{i-1} - C_i \vartheta_i + B_i \vartheta_{i+1} = -F_i, \qquad i = 1,2, \dots, N-1, \quad (8)$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} K(x_i) & 0 \\ A_i^6 & A_i^3 \end{pmatrix};\ C_i = \begin{pmatrix} 2x(x_i) & h^2 E \\ -A_i^5 & -A_i^2 \end{pmatrix};\ B_i = \begin{pmatrix} K(x_i) & 0 \\ A_i^4 & A_i^1 \end{pmatrix};\ F_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{f_i} \end{pmatrix};$$

Здесь для нахождения N+1 неизвестных векторов имеем N+1 матричных уравнений, а недостающие уравнения получаем на граничных условий (2) и (3) с учетом уравнения (4), используя при этом трехточечную аппраксимацию для значений производных $U'(x)$ и $W'(x)$ с точностью $O(h^2)$:

$$\left.\begin{aligned} A_0 \vartheta_0 - C_0 \vartheta_1 + B_0 \vartheta_2 = -F_0 \\ A_N \vartheta_{N-2} - C_N \vartheta_{N-1} + B_N \vartheta_N = -F_N \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

где

$$F_0 = -2h \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}; B_0 = -\begin{pmatrix} \beta_1 & \theta_1 \\ \beta_2 & \theta_2 \end{pmatrix}; \quad C_0 = 4B_0; \quad A_0 = 2h \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} + 3B_0;$$

$$A_N = \begin{pmatrix} \beta_3 & \theta_3 \\ \beta_4 & \theta_4 \end{pmatrix}; C_N = 4A_N;\ B_N = 2h \begin{pmatrix} \alpha_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \gamma_4 \end{pmatrix} + 3A_N;\ F_N = -2h \begin{pmatrix} d_3 \\ d_4 \end{pmatrix};$$

Итак, мы полностью сформулировали разностную задачу (8)-(9), решение которой, исходя из метода матричной прогонки [2-4], ищем в виде

$$\vartheta_i = X_{i+1} \vartheta_{i+1} + Z_{i+1}, \qquad i = 1,2 \dots, N-1; \qquad (10)$$

где

$$X_i = \{X_i^{P,S}\} \qquad p, s = 1,2 \dots ,2n; \qquad Z_i = \{Z_{i1}, Z_{i2}, \dots \dots Z_{i2n}\}$$

соответственно матричные и векторные прогоночные коэффиценты, определяемые из соотношений

$$X_{i+1} = (C_i - A_i X_i)^{-1} B_i; \qquad Z_{i+1} = (C_i - A_i X_i)^{-1} (F + A_i Z_i); \qquad (11)$$

Формулы для вычисления значений X_2 и Z_2 ,дающие возможность начать счет для прогоночных коэффициентов по формулам (11), получим так:

умножим слева на уравнение (8) при i=1 матрицу $A_0A_1^{-1}$ и, отнимая найденное соотношение от первого уравнения (9), приводим к равенству

$$\vartheta_1 = (C_0 - A_0A_1^{-1}C_1)^{-1}[(B_0 - A_0A_1^{-1}B_1)\vartheta_2 + F_0 - A_0A_1^{-1}F_1]. \quad (12)$$

Сопоставляя соотношение (12) с формулой (10) при i=1, имеем

$$X_2 = (C_0 - A_0A_1^{-1}C_1)^{-1}(B_0 - A_0A_1^{-1}B_1);$$

$$Z_2 = (C_0 - A_0A_1^{-1}C_1)^{-1}(F_0 - A_0A_1^{-1}F_1).$$

Xi и Zi для всех i, затем решая уравнения

$$\vartheta_{N-1} = X_n\vartheta_N + Z_N;$$

$$A_{N-1}\vartheta_{N-2} - C_{N-1}\vartheta_{N-1} + B_{N-1}\vartheta_N = -F_N$$

совместно со вторым уравнением (8) получаем

$$\vartheta_N = [B_N - A_NA_{N-1}^{-1}B_{N-1} - (C_N - A_NA_{N-1}^{-1}C_{N-1})X_N]^{-1} *$$

$$* [(C_N - A_NA_{N-1}^{-1}C_{N-1})Z_N - F_N - A_NA_{N-1}^{-1}F_{N-1}].$$

Далее с помощью обратной прогонки (10) вычислим $\vartheta_{N-1}, \vartheta_{N-2}, \dots \vartheta_1$. После этого найдем ϑ_0 по формуле

$$\vartheta_0 = A_1^{-1}(C_1\vartheta_1 - B_1\vartheta_2 - F_1).$$

В данной работе мы рассмотрели реализационный алгоритм поставленных задач. Теперь рассмотрим тестовая задача. Рассмотрим уравнения

$$[(1+x)U'']'' + (2+x^3)[(2+x)U'']' + (3+x)[(4+x)U']' + (2+x^3)U'' +$$

$$+(5+x)U' - (1-x)U = 49x^5 + 8x^4 + 145x^3 + 91x^2 - 18x - 16$$

с граничными условиями $U(0) = U'(0) = U(1) = U'(1) = 0$.

Точное решение данной задачи имеет следующие вид.

$$U = x^2(1-x)^2.$$

Для этой задачи можно установить условие путем непосредственного вычисления, обеспечивающее применимость метода матричной прогонки. В таблице 1. приведены точные и приближенные значения

$U(x),\ U'(x), KU''(x), [KU''(x)]'$

Таблица 1.

x	**Значение**	$U(x)$	$U'(x)$	$KU''(x)$	$[KU''(x)]'$
0	Точн.	0	0	2	-10
	Прибл.	0,00000000	0,00000000	1,99997582	-10,0000127
0.25	Точн.	0,03515625	0,1875	-0,3125	-8
	Прибл.	0,03515619	0,18750131	-0,31250172	-8,00001732
0.5	Точн.	0,0625	0	-1,5	-1
	Прибл.	0,06249976	0,00000147	-1,49997416	-0,99999351
0.75	Точн.	0,0351625	0,1875	-0,43250176	1,25
	Прибл.	0,03515619	0,18750132	0,4325	1,249976434
1	Точн.	0	0	4	26
	Прибл.	0,00000101	0,00000042	4,000001147	25,99945677

Из приведенных выше табличных данных видно, что точность определения численных результатов хорошо согласуется с погрешностью метода аппроксимации. Шаги интегрирования учитывались точностью h=0.001. Другие многочисленные расчёты на компьютере показали, что изложенные выше вычислительные алгоритмы устойчиво определяют расчётные величины в достаточно широких пределах изменения входных параметров рассматриваемых задач.

Литература

1. Самарский А.А. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнения четвертого порядка. Вычислительные методы и программирование. М., Изд-во МГУ, 1967.
2. Юлдашев, Т., & Исомиддинов, А. И. (2018). Вычислительные алгоритмы прикладных задач, описываемых системами дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Проблемы вычислительной и прикладной математики, (1), 77-85.
3. Inomjonovich, I. A. (2016). Boundary problems of elastic rods and their solution by finite difference method in various approximations. European science review, (1-2), 145-148.