ОБОБЩЕННОЕ НЕРАВЕНСТВО ГЕЛЬДЕРА ДЛЯ СУММ

Давлатов Шокир Олтибоевич

Каршинский инженерно-экономический институт, Каршинский международный институт,г.Карши, Узбекистан.

Аннотация. В этой статье доказана справедливость неравенства Гёльдера для сумм и при условии $p \geq 1, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = l, 1 \leq l \leq 2, a_k \geq 0, b_k \geq 0, k = \overline{1,n}$.

Ключевые слова. Неравенство, Гельдер, сумм, однородно.

Abstract. In this article, Hölder's inequality is proved for sums and under the condition $p \geq 1, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = l, 1 \leq l \leq 2, a_k \geq 0, b_k \geq 0, k = \overline{1,n}$.

Keywords. Inequality, Hölder,sums, homogeneous.

Нам известно, что неравенство Гельдера[1]

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q \right)^{1/q} \tag{1}$$

справедливо при $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ a_k \geq 0, b_k \geq 0, k = \overline{1,n}$.

докажем справедливость неравенство (1) и при

$$p \geq 1, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = l, 1 \leq l \leq 2, a_k \geq 0, b_k \geq 0, k = \overline{1,n} .$$

Доказательство. Ясно, что неравенство (1) однородно т. е. если оно выполнено для каких-либо двух векторов $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, то оно выполнено и для векторов λa ва μb, где λ ва μ - произвольные положительные числа.

Поэтому неравенство (1) достаточно доказать для случая когда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^p = \sum_{k=1}^{n} b_k^q = 1 \tag{2}$$

Итак , пусть выполнено условие (2); докажем, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq 1 . \tag{3}$$

Рассмотрим две случае.

1-случай. $1 \le l < 2$. Для определенности будем считать, что $p > 1, q \ge 1$. Из условия $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = l$ следует, что $p = \frac{q}{ql - 1}$.

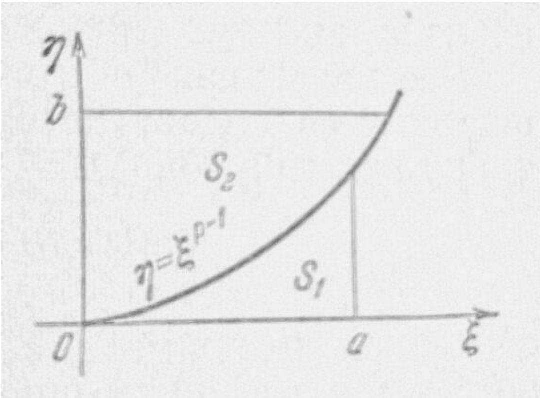

Рис.-1

Рассмотрим на плоскости (ξ, η) кривую, определяемую уравнением $\eta = \xi^{p-1}$ $(\xi > 0)$ (см. рис.-1). Из рисунка ясно, что при любом выборе положительных значений a и b будет $S_1 + S_2 \ge ab$. Вычислим площади S_1 и S_2:

$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1} d\xi = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b \eta^{1/p-1} d\eta = \frac{(p-1)b^{p/p-1}}{p} \quad .$$

Таким образом, справедливо числовое неравенство

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{(p-1)b^{p/p-1}}{p}. \qquad (4)$$

Очевидно, что $b_k^q \le b_k \le 1$. Поэтому если $\frac{1}{q(1-l)+1} \ge 1$, то справедливо неравенство

$$(b_k^q)^{1/(q(1-l)+1)} \le b_k^q. \qquad (5)$$

Считая, что $\frac{1}{q(1-l)+1} \ge 1$, и учитывая (2), (4), (5) получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} a_k^p + \frac{p-1}{p}\sum_{k=1}^{n} b_k^{q/q(1-l)+1} \le$$
$$\le \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p}\sum_{k=1}^{n} b_k^q = 1 \tag{6}$$

Неравенство (3) выполнено при $\frac{1}{q(1-l)+1} \ge 1$. Из неравенство $\frac{1}{q(1-l)+1} \ge 1$ получим

$$0 < q(1-l)+1 \le 1. \tag{7}$$

Откуда следует, что $1 \le l < 1 + \frac{1}{q} \le 2$ т.е. $1 \le l < 2$.

2-случай. $l = 1$ т.е. $p = 1, q = 1$. Докажем справедливость неравенство (3). Для этого достаточно доказать справедливость неравенство

$$ab \le (1-\lambda)a + \lambda b \tag{8}$$

при любых $a, b, \lambda\, (0 \le a, b, \lambda \le 1)$ чисел.

Очевидно, что неравенство (8) выполнено, если одно из чисел a или b равно нулю. Рассмотрим случай, когда a и b больше нуля. Для определенности будем считать, что $b \ge a$. Разделив неравенство (8) на ab получим

$$1 \le (1-\lambda)\frac{1}{b} + \lambda\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \lambda\frac{b-a}{ab}. \tag{9}$$

Откуда следует справедливость неравенство (8).

Теперь используя неравенство (8) получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le (1-\lambda)\sum_{k=1}^{n} a_k + \lambda\sum_{k=1}^{n} b_k = 1.$$

Что и требовалось даказать.

Теперь применяя последовательно неравенство (1) для суммы

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\ , \tag{10}$$

где $a_k \ge 0, b_k \ge 0, c_k \ge 0, k = \overline{1,n}$. Получим

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q c_k^q\right)^{1/q} \le$$
$$\le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{qr}\right)^{1/qr}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^{qf}\right)^{1/qf}\ , \tag{11}$$

неравенство. Где

$$p \geq 1, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = l, 1 \leq l \leq 2,$$

$$r \geq 1, f \geq 1, \frac{1}{r} + \frac{1}{f} = l_1, 1 \leq l_1 \leq 2.$$

Выражение $\frac{1}{p} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{qf}$ обозначим через l_2. Ясно, что $l_2 \leq 3$. Выпольняя простые действия, получим

$$l_2 = \frac{1}{p} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{qf} = \frac{1}{p} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{f}\right)\frac{1}{q} =$$
$$= \frac{1}{p} + l_1 \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = l \geq 1. \quad (12)$$

т.е. $1 \leq l_2 \leq 3$.

Следовательно из (11) следует, справедливость неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{p_1}\right)^{1/p_1} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{p_2}\right)^{1/p_2} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^{p_3}\right)^{1/p_3}, \quad (13)$$

где числа $p_1 \geq 1, p_2 \geq 1, p_3 \geq 1$ связанны условием $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = l_2, 1 \leq l_2 \leq 3$.

Аналогично, для суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{s} a_{ik}, \quad (14)$$

где $a_{ik} \geq 0, i = \overline{1, s}, k = \overline{1, n}$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{s} a_{ik} \leq \prod_{i=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{p_i}\right)^{1/p_i} \quad (15)$$

при любых чисел $p_i \geq 1$, $i = \overline{1, s}$; $s > 1$ связанных условием $\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{p_i} = l_s, 1 \leq l_s \leq s$.

Литературы.

1. А.Н.Колмогоров, С.Б. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. “Наука” 1986г.
2. Зорич В. А. Математический анализ. Насть I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997. - xiv + 554 с. ISBN 5-7036-0031-6