ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЫ КРИТИЧЕСКИХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ

Гулнора Джабборхоновна Пошаходжаева

Чирчикский государственный педагогический институт

Аннотация: *Настоящая работа посвящена изучению числовых показателей инвариантной меры для гладких гомеоморфизмов окружности* $S^1 = R^1 / Z^1 \cong [0,1)$ *с единственной критической точкой.*

Ключевые слова: *математические дисциплины, числовые характеристики, инвариантная мера, критические гомеоморфизмы.*

NUMERICAL CHARACTERISTICS OF INVARIANT MEASURE OF CRITICAL HOMEOMORPHISMS OF THE CIRCLE

Gulnora Jabborhonovna Poshahodzhaeva

Chirchik State Pedagogical Institute

The Republic of Uzbekistan

Abstract: *This work is devoted to the study of the numerical exponents of the invariant measure for smooth homeomorphisms of the circle with a single critical point.*

Keywords: *mathematical disciplines, numerical characteristics, invariant measure, critical homeomorphisms.*

Естественным обобщением диффеоморфизмов окружности являются гладкие гомеоморфизмы с одной критической точкой $x = x_{cr}$. Класс таких гомеоморфизмов был изучен вначале 1980-годов в связи проблемой перехода в хаос в одномерных динамических системах (см. напр. Ж. Йоккоз показал, что произвольный аналитический критический гомеоморфизм f с иррациональным числом вращения $\rho = \rho_f$ топологически эквивалентен линейному повороту $f_\rho(x) = x + \rho \ (mod 1),$ т.е. существует гомеоморфизм φ, такой, что $\varphi \circ f = f_\rho \circ \varphi.$

Определение 1. Пусть f гомеоморфизм окружности класса C^3, с одной критической точкой $x_0 = x_{cr}.$ Точка $x_{cr}.$ называется критической точкой порядка три, если $f'(x_0) = f''(x_0) = 0,$ и $f'''(x_0) = 0.$

Примерами критических гомеоморфизмов окружности являются отображения семейства Арнольда: $f_0(x) = x + \frac{\theta}{2\pi} sin 2\pi x, \ (\text{mod}1) \ \ \theta \in [0,\ 1].$ Грачек и Свентек [6] показали, что для критических C^3 - гомеоморфизмов окружности с одной кубической критической точкой и с иррациональным числом вращения $\rho = \rho_f,$ инвариантная мера μ_f является сингулярной относительно меры Лебега λ т.е. существует измеримое подмножество $A \subset S^1,$ такое, что $\mu_f(A) = 1$ и $\lambda(A) = 0.$ Рассмотрим два критические гомеоморфизмы f_1 и f_1 с тем же иррациональным числом вращения $\rho = \rho(f_1) = \rho(f_2),$ и с одной кубической критической точкой $x_0 = x_{cr}.$ Вопрос о регулярности сопряжения ψ между f_1 и f_1 называется проблемой "жесткости". Это проблема изучалось в работах де Мело и де Фариа [9], К. Ханина и А. Теплинского [8] и др.

Теорема 1. (см. [8]). Пусть f_1 и f_2 аналитические, критические гомеоморфизмы окружности с одной кубической критической точкой $x_0 = x_{cr}$ и тем же иррациональным числом "ограниченного типа" $\rho = \rho(f_1) = \rho(f_2).$ Тогда сопрягающий гомеоморфизм ψ между f_1 и f_2

принадлежит классу $C^{1+\alpha}$, где α - зависит только от числа вращения ρ.

Определим два числовые характеристики сингулярной инвариантной меры μ_f (см. [6]):

$$\underline{\tau}(x) = \liminf_{\varepsilon\to+0} \frac{\ln \mu_f([x, x+\varepsilon])}{\ln\varepsilon}, \quad \overline{\tau}(x) = \limsup_{\varepsilon\to+0} \frac{\ln \mu_f([x, x+\varepsilon])}{\ln\varepsilon}$$

Функции $\underline{\tau}(x)$ и $\overline{\tau}(x)$ являются инвариантными относительно f. Отсюда, а также из эргодичности f относительно мер μ_f и λ [6] следует, что обе эти функции являются почти постоянными и по мере μ_f, и по мере λ. Эти постоянные обозначим $\overline{\tau}(\mu)$, $\underline{\tau}(\mu)$ и $\overline{\tau}(\lambda)$, $\underline{\tau}(\lambda)$, соответственно. Грачек и Святек [6] показали, что для кубических критических гомеоморфизмов окружности с иррациональным числом вращения "ограниченного типа"(т.е. последовательность элементов разложения pf в непрерывную дробь ограничена) справедливы неравенства

$$1 < \underline{\tau}(\lambda) \le \overline{\tau}(\lambda) < +\infty, \quad 0 < \underline{\tau}(\mu) \le \overline{\tau}(\mu) < 1,$$

Другой важной характеристикой сингулярной инвариантной мере $\mu = \mu_f$ является хаусдорфова размерность $HD(\mu)$ (точная грань размерностей множеств "полной"меры μ_f). Известная лемма Фростмана утверждает, что хаусдорфова размерность $HD(\mu)$ совпадает с $\underline{\tau}(\mu)$. В силу (1.1) $0 < HD(\mu) < 1$. Результат настоящей работы дополняет результат работы Грачека и Свентека [6].

Теперь сформулируем основной результат нашей работы.

Теорема 2. Пусть f - вещественно-аналитический гомеоморфизм с одной кубической критической точкой x_c. Пусть l и k натуральные числа. Предположим, что число вращение ρ_f иррациональное и ее разложение в непрерывную дробь имеет вид: $\rho_f = [m_1, m_2, ..., m_l, m_{l+1}, ...]$, где

$m_s = k,$ для всех $s > l.$ Пусть μ_f вероятностная f - инвариантная мера. Тогда для почти всех x по мере Лебега λ (и по мере μ_f) существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\ln \mu_f([x, x+\varepsilon])}{\ln \varepsilon} = \tau_\lambda (\tau_\mu)$$

и его значение не зависит от $x.$ Кроме того, константы τ_λ и τ_μ зависят только от числа вращения $\rho_f.$

Используя оценки (1.1) получаем: $1 < \tau_\lambda < 1 < \tau_\mu < +\infty.$ Отметим что для критических отображений окружности с числом вращение равным золотому сечению $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ аналогичный результат был получен в работе А. Джалилова [4].

REFERENCE:

1. Шерматов, Е., Ханимкулов, Б. (2021). Естественная орасительная способность реки амударьи экономические и экологические вопросы в низовьях реки амударьи. Academic research in educational sciences, 2(1), 27-31.
2. Ханимкулов, Б. Р. (2021). Методика расхода воды реки зарафшан на основе гидротермического показателя климата. Academic research in educational sciences, 2(1), 55-58.
3. Холбоевна, Д. Г. (2020). Information and communication technologies for developing creative competence in the process of open teaching physics and maths. International Journal of Psychosocial Rehabilitation, 1(1), 434.
4. Жабборова, О. М., Ташпулатова, Д. М. (2021). Ўзбекистон янги мафкурасининг педагогик талқини. Academic research in educational sciences, 2(3), 584-589.

5. Жабборова О. М., Умарова З.А. (2021). Тарбия фанини кластер усулида ўқитишда педагогик конфликтларни бартараф этиш. Academic research in educational sciences, 1, 582-587.
6. Наримбетова, З. А., Сытина, Н. (2021). Учитель-нравственный пример для ученика. Academic research in educational sciences, 2(1), 1153-1159.
7. Eshkaraev, K., Norimbetova, Z. (2020). Methodological recommendations for organizing and holding mathematical circles. European Scientific Conference, 248-250.
8. Norimbetova, Z. A. (2020). Axborot kommunikatsion texnologiyalari yordamida geometriya fanini o'qitish metodikasi (10-11-sinflar misolida). Science and Education, 1(7).
9. Narimbetova, Z. A. (2020). Matematika fanida ta'lim texnologiyalaridan foydalanish o'quvchilar tafakkurining rivojlantiruvchi omil. Academic research in educational sciences, 1(3), 1253-1261.
10. Narimbetova, Z., Makhmudova, D. (2020). Developing creative competence through the formation of scientific generalization in students. International Journal of Psychosocial Rehabilitation ISSN, 1475-7192.
11. Akhmedov, B. A. (2021). Information technologies in Cluster systems: a competence approach. Universum: технические науки, 4 (85).
12. Akhmedov, B. A. (2021). Innovative cluster model for improving the quality of education. Academic Research in Educational Sciences, 2(3), 528-534.
13. Рустамов, У. Р., Бегзатова, Ш. П., Маликов, К. Х. (2021). Нанозарраларни ҳосил қилиш ва уларнинг магнит хоссалари. Scientific progress, 1(4).
14. Рустамов, У. Р., Маликов, К. Х. (2021). Магнит нанозарраларнинг баъзи хоссалари. Academic Research in Educational Sciences, 2(3).