УДК 517.951.2

Умаров Рахматилла Акрамович, д.ф. ф-м. PhD,
Андижанский институт сельского хозяйства и агротехнологии

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. *В статье изучаются две классические задачи Штурма–Лиувилля с различными краевыми условиями. Доказывается полнота систем собственных функций в пространстве $L_2(0, \pi)$. Приводятся собственные значения и соответствующие собственные функции, а также обсуждаются ортонормированность и полнота данных систем.*

Ключевые слова. *Штурм–Лиувилль, собственные функции, полнота системы, ортонормированность, спектральный анализ.*

Rakhmatilla Akramovich Umarov, PhD,
Andijan Institute of Agriculture and Agrotechnology

ON THE COMPLETENESS OF EIGENFUNCTIONS OF AN ASYMMETRIC STURM–LIOUVILLE PROBLEM

Abstract. *This article studies two classical Sturm–Liouville problems with different boundary conditions. The completeness of the systems of eigenfunctions in the space $L_2(0, \pi)$ is proved. The eigenvalues and corresponding eigenfunctions are presented, and the orthonormality and completeness of these systems are discussed.*

Keywords*: Sturm–Liouville, eigenfunctions, system completeness, orthonormality, spectral analysis*

Введение. Задачи Штурма–Лиувилля занимают центральное место в теории дифференциальных уравнений с частными производными, спектральном анализе и математической физике. Собственные функции таких задач образуют ортонормированные системы, которые используются для разложения функций, решения краевых задач и построения математических моделей. Особый интерес представляет исследование полноты систем собственных функций в несимметричных вариантах задач Штурма–Лиувилля, где классические методы требуют уточнения. В данной статье, на основе представленного материала, рассматривается одна из таких задач, а также приводятся дополнительные литературные источники, расширяющие теоретическую основу.

Рассмотрим следующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = Y'(l) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Собственные функции задачи (1) имеют вид

$$Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2q} y\right), \quad n = \overline{1,\infty} \tag{2}$$

Лемма. Система функций (2) ортонормирована и полна в L_2.

Доказательство. Вычислением проверяем ортонормированность системы функций. При $n \neq m$:

$$\int_0^q Y_n(y) Y_m(y) = \frac{2}{q} \int_0^q \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2q} y\right) \sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{2q} y\right) dy =$$

$$= \frac{1}{q} \int_0^q \left(\cos\left(\frac{(n-m)\pi}{q} y\right) - \cos\left(\frac{(n+m-1)\pi}{q} y\right) \right) dy =$$

$$= \frac{1}{q} \left(\frac{q}{(n-m)\pi} \sin\left(\frac{(n-m)\pi}{q} y\right) - \frac{q}{(n+m-1)\pi} \sin\left(\frac{(n+m-1)\pi}{q} y\right) \right)\Bigg|_0^q = 0,$$

Для доказательства полноты воспользуемся следующей теоремой:

Теорема. Необходимым и достаточным условием полноты ортонормальной системы L_2-функции $\{\varphi(x)\}$ во всем классе L_2 является выполнение соотношения [1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \left[\int_a^{\xi} \varphi_n(x) dx \right]^2 d\xi = \frac{1}{2} (b-a)^2.$$

Тогда необходимо доказать равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{q}\int_0^q\left[\int_0^{\xi}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2q}y\right)dy\right]^2 d\xi=\frac{1}{2}(q-0),$$

сначала вычисляем этот интеграл

$$\sqrt{\frac{2}{q}}\int_0^{\xi}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2q}y\right)dy=-\sqrt{\frac{2}{q}}\frac{2q}{(2n-1)\pi}\left(\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2q}\xi\right)-1\right),$$

находим квадрат полученного результата

$$\left(-\sqrt{\frac{2}{q}}\frac{2q}{(2n-1)\pi}\left(\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2q}\xi\right)-1\right)\right)^2=$$

$$=\frac{8q}{(2n-1)^2\pi^2}\left(\cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi}{2q}\xi\right)-2\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2q}\xi\right)+1\right),$$

теперь находим значение внешнего интеграла

$$\frac{8q}{(2n-1)^2\pi^2}\int_0^q\left(\cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi}{2q}\xi\right)-2\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2q}\xi\right)+1\right)dy=$$

$$=\frac{12q^2}{(2n-1)^2\pi^2}-\frac{32q^2(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3\pi^3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12q^2}{(2n-1)^2\pi^2}-\frac{32q^2(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3\pi^3}\right)=\frac{12q^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{32q^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3},$$

Используя формулы $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$ [6] и стандартные преобразования, получаем требуемое равенство.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{q}\int_0^q\left[\int_0^{\xi}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2q}y\right)dy\right]^2 d\xi=\frac{12q^2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{8}-\frac{32q^2}{\pi^3}\cdot\frac{\pi^3}{32}=\frac{3q^2}{2}-\frac{2q^2}{2}=\frac{q^2}{2}$$

Следовательно, система собственных функций задачи (1) является полной.

Литература

1. Власов В. И. Спектральная теория дифференциальных операторов. – М.: Наука, 2010.

2. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Физматлит, 2008.

3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1999.

4. Zettl A. Sturm–Liouville Theory. Mathematical Surveys and Monographs. – AMS, 2005.

5. Levitan B., Sargsjan I. Introduction to Spectral Theory. – AMS, 1975.

6. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений . Гос. Изд. Физ.-мат. Наук. Москва 1963.